دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

«تمرین درس دینامیک سازه ها»

مجموعه تمرینات سری ششم

استاد محترم: جناب آقای دکتر تقی خانی

دانشجو:
سینا کاظم زاده آزاد

شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

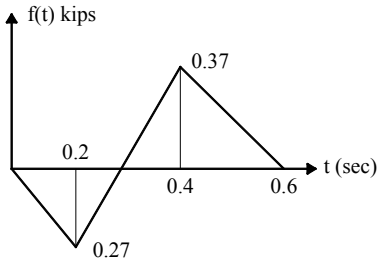
زمان تحویل: ۹۰/۱۰/۲۰

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

سینا کاظم زاده آزاد شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

مجموعه تمرینات شماره ۶ درس دینامیک سازه ها: (موعد تحویل: ۹۰/۱۰/۲۰)

۱) مطلوبست تعیین پاسخ سیستم دو درجه آزادی با مشخصات زیر، برای بارگذاری نمایش داده شده.



$$\underline{k}=\begin{bmatrix}۱۰۰ & -۵۰\\ -۵۰ & ۵۰\end{bmatrix}\ ,\quad \underline{m}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\ ,\quad \underline{P}=\begin{bmatrix}۷۷۲\\ ۳۸۶\end{bmatrix}f(t)$$

جواب: برای جداسازی معادلات مزدوج حرکت، از روش مُدال استفاده می شود. در نتیجه داریم:

$$\underline{k}-\omega_n^۲\underline{m}=\begin{bmatrix}۱۰۰-۲\omega_n^۲ & -۵۰\\ -۵۰ & ۵۰-\omega_n^۲\end{bmatrix}\Rightarrow\left|\underline{k}-\omega_n^۲\underline{m}\right|=۰\Rightarrow\boxed{\underline{\omega}=\begin{bmatrix}۳/۸۳\\ ۹/۲۴\end{bmatrix}\ \mathrm{rad}/\mathrm{sec}}$$

$$\omega_۱=۳/۸۳\ \Rightarrow\ [\underline{k}-\omega_۱^۲\underline{m}]\,\underline{\phi}_۱=\begin{bmatrix}۷۰/۶۷ & -۵۰\\ -۵۰ & ۳۵/۳۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{۱۱}\\ \phi_{۲۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}\xrightarrow{\phi_{۱۱}=۱}\underline{\phi}_۱=\begin{bmatrix}۱\\ ۱/۴۱۴\end{bmatrix}$$

$$\omega_۲=۹/۲۴\ \Rightarrow\ [\underline{k}-\omega_۲^۲\underline{m}]\,\underline{\phi}_۲=\begin{bmatrix}-۷۰/۷۱ & -۵۰\\ -۵۰ & -۳۵/۳۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{۱۲}\\ \phi_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}\xrightarrow{\phi_{۱۲}=۱}\underline{\phi}_۲=\begin{bmatrix}۱\\ -۱/۴۱۴\end{bmatrix}$$

بنابراین بر اساس نتایج فوق ماتریس اَشکال مُدی برابر خواهد بود با:

$$\boxed{\underline{\phi}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱/۴۱۴ & -۱/۴۱۴\end{bmatrix}}$$

* با توجه به وجود دو مُد متمایز، می توان از بحث تعامد مُدها برای حل مسأله استفاده نمود. لذا داریم:

جرم مُدی:

$$\underline{M}=\underline{\phi}^T\underline{m}\,\underline{\phi}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱/۴۱۴ & -۱/۴۱۴\end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱/۴۱۴ & -۱/۴۱۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \underline{\phi}^T \underline{k}\, \underline{\phi} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۴۱۴ & -۱/۴۱۴ \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} ۱۰۰ & -۵۰ \\ -۵۰ & ۵۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۴۱۴ & -۱/۴۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۸/۶ & ۰ \\ ۰ & ۳۴۱/۴ \end{bmatrix}$$

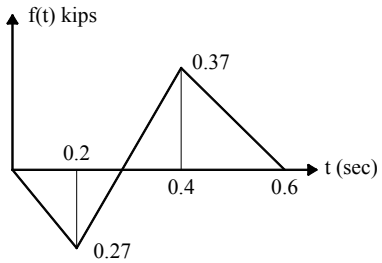
ماتریس سختی مُدی و بردار بار مُدی:

$$\underline{P}^* = \underline{\phi}^T \underline{P} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۴۱۴ & -۱/۴۱۴ \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} ۷۷۲ \\ ۳۸۶ \end{bmatrix} f(t) = \begin{bmatrix} ۱۳۱۸ \\ ۲۲۶ \end{bmatrix} f(t)$$

در نتیجه:

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{K}\,\underline{q} = \underline{P}^* \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_۱ \\ \ddot{q}_۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵۸/۶ & ۰ \\ ۰ & ۳۴۱/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_۱ \\ q_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۳۱۸ \\ ۲۲۶ \end{bmatrix} f(t)$$

* تابع $f(t)$ در صفحه قبل نمایش داده شده است. بر این اساس معادلات فوق نشان دهنده دو معادله حرکت جدا از هم، برای سیستم یک درجه آزادی تحت بارگذاری دلخواه می باشند. می توان با استفاده از روش کلاسیک، انتگرال گیری دوهامل و یا روش های عددی هر معادله را حل نموده و q_i را تعیین کرد. در دو روش اول لازم است هر قطعه از بارگذاری به صورت مجزّا بررسی شود؛ به این دلیل در این سؤال از **روش عددی نیومارک** استفاده می شود. بدین منظور کُدی به کمک نرم افزار MATLAB نوشته شده است که پاسخ سازه را در محدوده بار و ارتعاش آزاد بعد از آن نشان می دهد. این کُد در انتهای حل مربوط به همین سؤال ارائه شده است. برای استفاده از این کُد، بارگذاری سازه در بازه های زمانی ۰/۰۵ ثانیه، مطابق جدول زیر، به برنامه داده شده است. پاسخ های مُدی به شکل زیر می باشند:

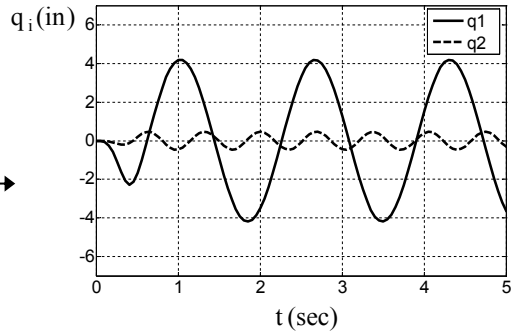


پاسخ های مُدی

حل به روش نیومارک

$\gamma = ۰/۵ \;,\; \beta = ۰/۱۶۷$

کُد مربوطه در صفحه بعد

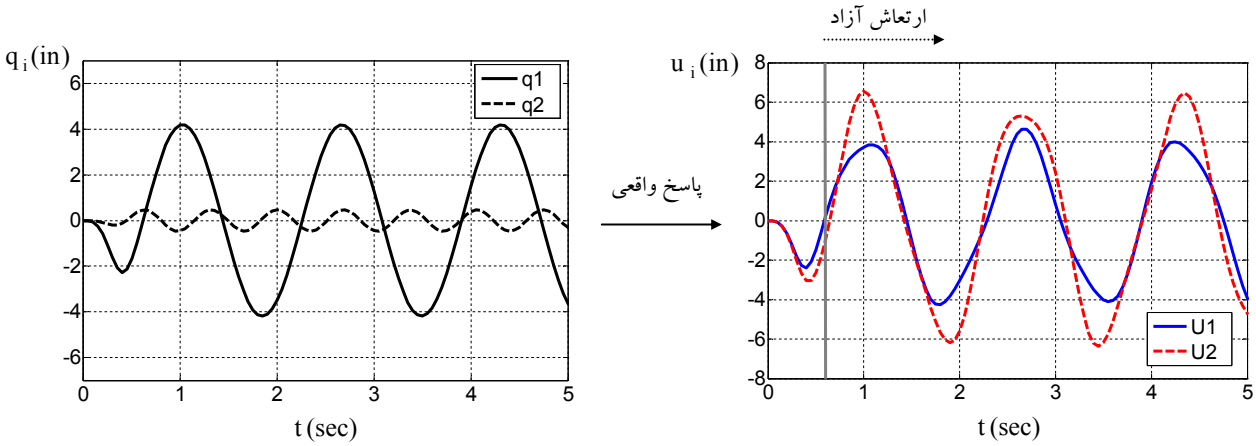


t	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳۵	۰/۴	۰/۴۵	۰/۵	۰/۵۵	ارتعاش آزاد
f	-۰/۰۶۷۵	-۰/۱۳۵	-۰/۲۰۲۵	-۰/۲۷	-۰/۱۱	۰/۰۵	۰/۲۱	۰/۳۷	۰/۲۷۷۵	۰/۱۸۵	۰/۰۹۲۵	۰

* با داشتن پاسخ های مُدی و استفاده از ماتریس اَشکال مودی می توان **پاسخ واقعی سازه** را تعیین نمود:

$$\underline{U}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\underline{\phi}\,\underline{q}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1.414 & -1.414\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1+q_2\\1.414q_1-1.414q_2\end{bmatrix}}$$

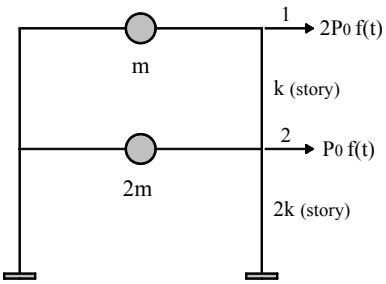
* بنابراین برای تعیین پاسخ سازه کافیست در هر لحظه پاسخ q_1 و q_2 را با یکدیگر جمع جبری کنیم:



کُد نوشته شده در MATLAB برای تحلیل دینامیکی خطی با روش نیومارک (سؤال ۱)

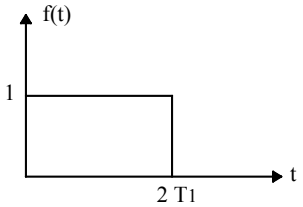
```
%% Input Data-------------------------------------------------------------

P0=1318;   k=58.6;   m=4;
P=[0,-0.0675,-0.135,-0.2025,-0.27,-.11,0.05,0.21,0.37,0.2775,0.185,0.0925];

%% Initial Calculations---------------------------------------------------

DT=0.05; Gama=0.5; Beta=1/6;
U(1)=0; Ud(1)=0; Udd(1)=0;
kb=k+((1/(Beta*(DT^2)))*m);
a=m/(Beta*DT); b=m/(2*Beta);
P(1,size(P,2)+1:201)=zeros; P=P0*P; kk=2;

%% Linear Newmark Method (Gama=1/6)---------------------------------------

for i=1:DT:10    %Total Time 10 sec
    DeltaP=P(kk)-P(kk-1);
    DeltaPb=DeltaP+a*Ud(kk-1)+b*Udd(kk-1);
    Du=DeltaPb/kb;
    Dud=((Gama/(Beta*DT))*Du)-((Gama/Beta)*Ud(kk-1))
                                  +(DT*(1-(Gama/(2*Beta)))*Udd(kk-1));
    Dudd=(Du/(Beta*(DT^2)))-(Ud(kk-1)/(Beta*DT))-(Udd(kk-1)/(2*Beta));
    U(kk)=U(kk-1)+Du;
    Ud(kk)=Ud(kk-1)+Dud;
    Udd(kk)=Udd(kk-1)+Dudd;  kk=kk+1;
end
```

۲) مطلوبست بررسی پاسخ سیستم نشان داده شده، به شرطی که T_1 زمان تناوب مد اول سازه باشد.



جواب: در مورد ماتریس های جرم و سختی می توان نوشت:

$$\underline{k}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{m}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$



در نتیجه ماتریس مربوط به معادله مشخصه برابر خواهد بود با:

$$\underline{k}-\omega_n^2\underline{m}=\begin{bmatrix} k-m\omega_n^2 & -k \\ -k & 3k-2m\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\left|\underline{k}-\omega_n^2\underline{m}\right|=2k^2-5km\omega_n^2+2m^2\omega_n^4=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\omega}=\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{k/2m} \\ \sqrt{2k/m} \end{bmatrix}}$$

$$\omega_1=\sqrt{k/2m} \;\Rightarrow\; [\underline{k}-\omega_1^2\underline{m}]\,\underline{\phi}_1=\begin{bmatrix} k/2 & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi_{11}=1} \underline{\phi}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0/5 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2=\sqrt{2k/m} \;\Rightarrow\; [\underline{k}-\omega_2^2\underline{m}]\,\underline{\phi}_2=\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi_{12}=1} \underline{\phi}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین بر اساس نتایج فوق ماتریس اَشکال مُدی سازه برابر خواهد بود با:

$$\boxed{\underline{\phi}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix}}$$

* با توجه به وجود دو مُد متمایز، می توان از بحث تعامد مُدها برای حل مسأله استفاده نمود. لذا داریم:

جرم مُدی:

$$\underline{M}=\underline{\phi}^T\underline{m}\,\underline{\phi}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/5m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}$$

سختی مُدی:

$$\underline{K}=\underline{\phi}^T\underline{k}\,\underline{\phi}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0/75k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}$$

بردار بار مُدی:

$$\underline{P}^* = \underline{\phi}^T \underline{P} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰/۵ & -۱ \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} ۲P_o \\ P_o \end{bmatrix} f(t) = \begin{bmatrix} ۲/۵P_o \\ P_o \end{bmatrix} f(t)$$

در نتیجه:

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{K}\,\underline{q} = \underline{P}^* \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} ۱/۵m & ۰ \\ ۰ & ۳m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_۱ \\ \ddot{q}_۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۷۵k & ۰ \\ ۰ & ۶k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_۱ \\ q_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲/۵P_o \\ P_o \end{bmatrix} f(t)$$

* تابع $f(t)$ در صفحه قبل نمایش داده شده است. بر این اساس معادلات فوق نشان دهنده دو معادله حرکت جدا از هم، برای سیستم یک درجه آزادی تحت بارگذاری پله ای می باشند. بنابراین داریم:

$$۱/۵m\,\ddot{q}_۱ + ۰/۷۵k\,q_۱ = \begin{cases} ۲/۵P_o & t \le ۲T_۱ \\ ۰ & t > ۲T_۱ \end{cases} \quad , \quad ۲T_۱ = ۲ \times \frac{۲\pi}{\omega_۱} = ۲ \times \frac{۲\pi}{\sqrt{k/۲m}} = \frac{۴\pi}{\sqrt{k/۲m}}$$

$$۳m\,\ddot{q}_۲ + ۶k\,q_۲ = \begin{cases} P_o & t \le ۲T_۱ \\ ۰ & t > ۲T_۱ \end{cases} \quad , \quad ۲T_۱ = ۲ \times \frac{۲\pi}{\omega_۱} = ۲ \times \frac{۲\pi}{\sqrt{k/۲m}} = \frac{۴\pi}{\sqrt{k/۲m}}$$

لذا:

$$q_۱ = \begin{cases} \left[\dfrac{۲/۵P_o}{۰/۷۵k}\right]\{۱ - \cos(\sqrt{k/۲m}\,t)\} & , \quad t \le \dfrac{۴\pi}{\sqrt{k/۲m}} \\ \left[\dfrac{۲/۵P_o}{۰/۷۵k}\right]\{\cos(\sqrt{k/۲m}\,t - ۴\pi) - \cos(\sqrt{k/۲m}\,t)\} = ۰ & , \quad t > \dfrac{۴\pi}{\sqrt{k/۲m}} \end{cases}$$

با ساده سازی

و نیز:

$$q_۲ = \begin{cases} \left[\dfrac{P_o}{۶k}\right]\{۱ - \cos(\sqrt{۲k/m}\,t)\} & , \quad t \le \dfrac{۴\pi}{\sqrt{k/۲m}} \\ \left[\dfrac{P_o}{۶k}\right]\{\cos(\sqrt{۲k/m}\,t - ۸\pi) - \cos(\sqrt{۲k/m}\,t)\} = ۰ & , \quad t > \dfrac{۴\pi}{\sqrt{k/۲m}} \end{cases}$$

با ساده سازی

* که از نتایج فوق مشاهده می شود که ارتعاش آزاد بعد از بار وجود ندارد. حال با داشتن پاسخ های مُدی و استفاده از ماتریس اَشکال مودی می توان **پاسخ واقعی سازه** را تعیین نمود. بدین منظور لازم است محاسبات مقابل انجام گیرد:

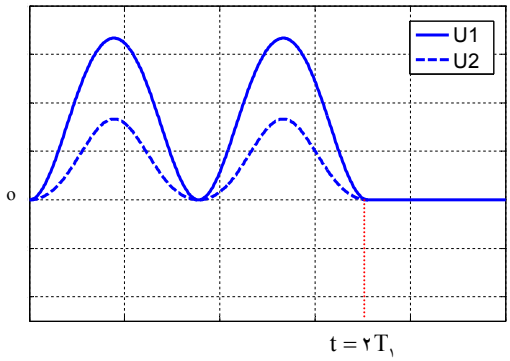
$$\underline{U} = \underline{\phi}\,\underline{q} \;\Rightarrow\; \underline{U} = \begin{bmatrix} u_۱(t) \\ u_۲(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰/۵ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_۱(t) \\ q_۲(t) \end{bmatrix}$$

در نهایت:

$$u_1(t)=\frac{P_o}{3k}\left[\sin^2\left(\frac{t\sqrt{2k/m}}{2}\right)+20\sin^2\left(\frac{t\sqrt{k/2m}}{2}\right)\right] \quad , \quad t\le\frac{4\pi}{\sqrt{k/2m}}$$

$$u_2(t)=\frac{P_o}{3k}\left[10\sin^2\left(\frac{t\sqrt{k/2m}}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t\sqrt{2k/m}}{2}\right)\right] \quad , \quad t\le\frac{4\pi}{\sqrt{k/2m}}$$

* مدت حضور بار پله ای، ضریب صحیحی از T_1 انتخاب شده است؛ لذا مشابه حالت یک درجه آزادی[1]، ارتعاش آزادی بعد از اتمام بار مشاهده نمی شود. نمودار شِماتیک مقابل به کمک نرم افزار MATLAB ترسیم شده است.



---

۳) مشخصات ساختمانی مطابق روابط زیر ارائه شده است. مطلوبست تعیین حداکثر جا به جایی، برش و لنگر واژگونی در هر طبقه برای هر مُد ارتعاشی. همچنین به کمک روش آماری SRSS مطلوبست تعیین حداکثر های کلی برای مقادیر فوق الذکر. $\underline{S}_a$ مقادیر شتاب حداکثر هر مُد از طیف شتاب می باشد.

$$\underline{m}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\phi}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0.548&-1.522&-6.26\\0.198&-0.872&12.10\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\omega}=\begin{bmatrix}3.88\\9.15\\15.31\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{S}_a=\begin{bmatrix}9.66\\5.15\\12.88\end{bmatrix}$$

جواب: بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درس و موجود در کتب مرجع می دانیم که طیف های پاسخ بر اساس حداکثر پاسخ الاستیک سیستم یک درجه آزادی به زلزله ای مشخص و از حل رابطه ای مشابه رابطه مقابل تعیین می شوند:

$$\ddot{q}+2\xi\omega_n\dot{q}+\omega_n^2 q=\ddot{u}_g$$

ولی معادله حاکم بر رفتار هر مُد ارتعاشی برابر است با:

$$\ddot{q}_i+2\xi_i\omega_i\dot{q}_i+\omega_i^2 q_i=\frac{L_i}{M_i}\ddot{u}_g$$

---

[1] Dynamics of Structures, A. K. Chopra, 1995 , **Page 133**

* در نتیجه لازم است مقادیر قرائت شده از طیف با ضریب مشارکت مودی ($\Gamma_i = L_i / M_i$)، مقیاس شود. مسلماً این روش زمانی صحیح خواهد بود که رفتار سیستم در محدوده الاستیک فرض شده باشد.

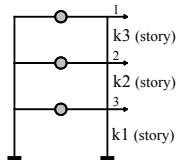
$$\underline{M} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰/۵۴۸ & -۱/۵۲۲ & -۶/۲۶ \\ ۰/۱۹۸ & -۰/۸۷۲ & ۱۲/۱۰ \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰/۵۴۸ & -۱/۵۲۲ & -۶/۲۶ \\ ۰/۱۹۸ & -۰/۸۷۲ & ۱۲/۱۰ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ۲/۶۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۸/۱۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳۷۳/۲ \end{bmatrix}$$

و بردار بار مؤثر مُدی:

$$\underline{L} = \underline{\phi}^T \underline{m}\, \underline{1} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰/۵۴۸ & -۱/۵۲۲ & -۶/۲۶ \\ ۰/۱۹۸ & -۰/۸۷۲ & ۱۲/۱۰ \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ۳/۴۹ \\ -۲/۷۹ \\ ۱۳/۶۸ \end{bmatrix}$$

* در تعیین برش طبقات، ماتریس سختی سازه مورد نیاز می باشد. از معادله مشخصه می توان نوشت:

$$[\underline{k} - \underline{m}\,\omega_۱^۲]\underline{\phi}_۱ = \underline{o} \quad , \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} k_۳ & -k_۳ & ۰ \\ -k_۳ & k_۳ + k_۲ & -k_۲ \\ ۰ & -k_۲ & k_۱ + k_۲ \end{bmatrix} \longleftarrow$$



با جاگذاری:

$$\begin{bmatrix} ۰/۴۵۲k_۳ - ۳۰/۱۱ \\ ۰/۳۵k_۲ - ۰/۴۵۲k_۳ - ۱۶/۵ \\ ۰/۱۹۸k_۱ - ۰/۳۵k_۲ - ۵/۹۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \\ o \\ o \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_۱ = ۲۶۵/۴۷ \\ k_۲ = ۱۳۳/۱۵ \quad (\text{kips/ft}) \\ k_۳ = ۶۶/۶۲ \end{cases}$$

پاسخ های مُد اول

جا به جایی:

$$\underline{U}_۱^{Max} = \underline{\phi}_۱ |\Gamma_۱| D_۱ = \underline{\phi}_۱ \left| \frac{L_۱}{M_۱} \right| \frac{S_{a۱}}{\omega_۱^۲} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۵۴۸ \\ ۰/۱۹۸ \end{bmatrix} \times \frac{۳/۴۹}{۲/۶۸} \times \frac{۹/۶۶}{(۳/۸۸)^۲} = \begin{bmatrix} ۰/۸۳۶ \\ ۰/۴۵۸ \\ ۰/۱۶۵ \end{bmatrix} \text{ ft}$$

دریفت بین طبقه ای:

$$\underline{\delta}_۱^{Max} = \begin{bmatrix} ۰/۸۳۶ \\ ۰/۴۵۸ \\ ۰/۱۶۵ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰/۴۵۸ \\ ۰/۱۶۵ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۳۷۸ \\ ۰/۲۹۳ \\ ۰/۱۶۵ \end{bmatrix} \text{ ft (Drifts)}$$

نیروی استاتیکی جانبی:

$$\underline{F}_۱^{Max} = \underline{k}^{story} \underline{\delta}_۱^{Max} = \begin{bmatrix} ۰/۳۷۸ \times ۶۶/۶۲ \\ ۰/۲۹۳ \times ۱۳۳/۱۵ \\ ۰/۱۶۵ \times ۲۶۵/۴۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۵/۱۸ \\ ۳۹/۰۱ \\ ۴۳/۸۰ \end{bmatrix} \text{ kips}$$

پاسخ های مُد دوم

جا به جایی:

$$\underline{U}_{۲}^{Max} = \underline{\phi}_{۲} \left| \frac{L_{۲}}{M_{۲}} \right| \frac{S_{a۲}}{\omega_{۲}^{۲}} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱/۵۲۲ \\ -۰/۸۷۲ \end{bmatrix} \times \frac{۲/۷۹}{۸/۱۵} \times \frac{۵/۱۵}{(۹/۱۵)^{۲}} = \begin{bmatrix} ۰/۰۲۱ \\ -۰/۰۳۲ \\ -۰/۰۱۸ \end{bmatrix} \text{ ft}$$

دریفت بین طبقه ای:

$$\underline{\delta}_{۲}^{Max} = \begin{bmatrix} ۰/۰۲۱ \\ -۰/۰۳۲ \\ -۰/۰۱۸ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۰/۰۳۲ \\ -۰/۰۱۸ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۰۵۳ \\ -۰/۰۱۴ \\ -۰/۰۱۸ \end{bmatrix} \text{ ft (Drifts)}$$

نیروی استاتیکی جانبی:

$$\underline{F}_{۲}^{Max} = \underline{k}^{story} \underline{\delta}_{۲}^{Max} = \begin{bmatrix} ۰/۰۵۳ \times ۶۶/۶۲ \\ -۰/۰۱۴ \times ۱۳۳/۱۵ \\ -۰/۰۱۸ \times ۲۶۵/۴۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۵۳ \\ -۱/۸۶ \\ -۴/۷۸ \end{bmatrix} \text{ kips}$$

پاسخ های مُد سوم

جا به جایی:

$$\underline{U}_{۳}^{Max} = \underline{\phi}_{۳} \left| \frac{L_{۳}}{M_{۳}} \right| \frac{S_{a۳}}{\omega_{۳}^{۲}} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۶/۲۶ \\ ۱۲/۱۰ \end{bmatrix} \times \frac{۱۳/۶۸}{۳۷۳/۲} \times \frac{۱۲/۸۸}{(۱۵/۳۱)^{۲}} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۲ \\ -۰/۰۱۳ \\ ۰/۰۲۴ \end{bmatrix} \text{ ft}$$

دریفت بین طبقه ای:

$$\underline{\delta}_{۳}^{Max} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۲ \\ -۰/۰۱۳ \\ ۰/۰۲۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۰/۰۱۳ \\ ۰/۰۲۴ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۰۱۵ \\ -۰/۰۳۷ \\ ۰/۰۲۴ \end{bmatrix} \text{ ft (Drifts)}$$

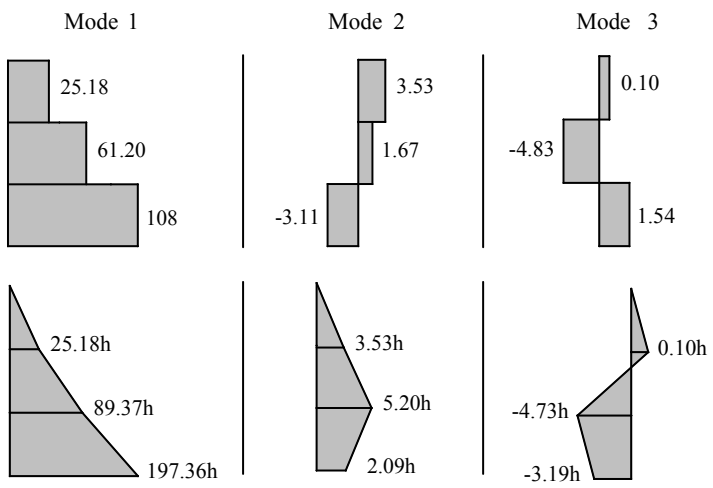
نیروی استاتیکی جانبی:

$$\underline{F}_{۳}^{Max} = \underline{k}^{story} \underline{\delta}_{۳}^{Max} = \begin{bmatrix} ۰/۰۱۵ \times ۶۶/۶۲ \\ -۰/۰۳۷ \times ۱۳۳/۱۵ \\ ۰/۰۲۴ \times ۲۶۵/۴۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۱۰ \\ -۴/۹۳ \\ ۶/۳۷ \end{bmatrix} \text{ kips}$$

برش طبقات (kips):

(h ارتفاع طبقات می باشد)

لنگر واژگونی طبقات (kips-ft):



ترکیب پاسخ های مُد ها

اکنون با ترکیب آثار مُدها با روش SRSS می توان پوشِ پاسخ حداکثر در هر طبقه را تعیین نمود:

جا به جایی:

$$\underline{U}^{Max} = \begin{bmatrix} u_{۱}^{Max} \\ u_{۲}^{Max} \\ u_{۳}^{Max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{۰/۸۳۶^{۲} + ۰/۰۲۱^{۲} + ۰/۰۰۲^{۲}} \\ \sqrt{۰/۴۵۸^{۲} + ۰/۰۳۲^{۲} + ۰/۰۱۳^{۲}} \\ \sqrt{۰/۱۶۵^{۲} + ۰/۰۱۸^{۲} + ۰/۰۲۴^{۲}} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{U}^{Max} = \begin{bmatrix} ۰/۸۳۶ \\ ۰/۴۵۹ \\ ۰/۱۶۸ \end{bmatrix} \text{ft}}$$

نیروی جانبی:

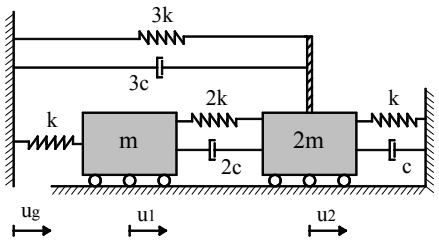
$$\underline{F}^{Max} = \begin{bmatrix} f_{۱}^{Max} \\ f_{۲}^{Max} \\ f_{۳}^{Max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{۲۵/۱۸^{۲} + ۳/۵۳^{۲} + ۰/۱^{۲}} \\ \sqrt{۳۹/۰۱^{۲} + ۱/۸۶^{۲} + ۴/۹۳^{۲}} \\ \sqrt{۴۳/۸۰^{۲} + ۴/۷۸^{۲} + ۶/۳۷^{۲}} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{F}^{Max} = \begin{bmatrix} ۲۵/۴۳ \\ ۳۹/۳۷ \\ ۴۴/۵۲ \end{bmatrix} \text{kips}}$$

برش:

$$\underline{V}^{Max} = \begin{bmatrix} V_{3rd\ Story}^{Max} \\ V_{2nd\ Story}^{Max} \\ V_{1st\ Story}^{Max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{۲۵/۱۸^{۲} + ۳/۵۳^{۲} + ۰/۱^{۲}} \\ \sqrt{۶۱/۲^{۲} + ۱/۶۷^{۲} + ۴/۸۳^{۲}} \\ \sqrt{۱۰۸^{۲} + ۳/۱۱^{۲} + ۱/۵۴^{۲}} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{V}^{Max} = \begin{bmatrix} ۲۵/۴۳ \\ ۶۱/۴۱ \\ ۱۰۸/۱ \end{bmatrix} \text{kips}}$$

---

۴) مطلوبست تعیین پاسخ سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل، به حرکت تکیه گاه خود.



$c = ۱\ \text{ton.sec}/\text{cm}$ | $W = mg = ۱۰\ \text{ton}$

$k = ۱/۵\ \text{ton}/\text{cm}$ | $u_g = ۲\cos \pi t$

جواب: در ابتدا لازم است ماتریس های سختی، میرایی، جرم و بار مؤثر تعیین شود. برای حل مسأله از روشی سیستماتیک استفاده شده است[۱]. در این روش تغییرمکان تکیه گاه نیز جزو درجات آزادی محسوب می شود. ماتریس های سختی و میرایی به سادگی و با استفاده از اِعمال جا به جایی (یا سرعت) واحد تنها در یکی از درجات آزادی و تعیین نیروهای ایجاد شده در سایر درجات آزادی محاسبه میشود.

---

[۱] Dynamics of Structures, A. K. Chopra, 1995 , **Page 351**

در نتیجه:

$$\underline{k}^{t}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3k & -2k & -k \\ -2k & 6k & -3k \\ -k & -3k & 4k \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_g \end{array} \quad , \quad \underline{c}^{t}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \dot{u}_1 & \dot{u}_2 & \dot{u}_g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2c & -2c & 0 \\ -2c & 6c & -3c \\ 0 & -3c & 3c \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \dot{u}_1 \\ \leftarrow \dot{u}_2 \\ \leftarrow \dot{u}_g \end{array}$$

* این ماتریس سختی کلی مطابق رابطه زیر به چهار بخش قابل اِفراز می باشد. این بخش ها در واقع درجات آزادی مربوط به سازه و درجه آزادی مربوط به تکیه گاه را از یکدیگر جدا می کنند. داریم:

$$\underline{k}^{t}=\begin{bmatrix} \underline{k} & \underline{k}_g \\ \underline{k}_g^{T} & \underline{k}_{gg} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c} 3k & -2k & -k \\ -2k & 6k & -3k \\ \hdashline -k & -3k & 4k \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} \underline{k}=\begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{bmatrix} & \text{(سختی سازه)} \\ \underline{k}_g=\begin{bmatrix} -k \\ -3k \end{bmatrix} \end{cases}$$

* در کتب مرجع[1] ذکر می شود که بردار بار مؤثر را می توان از رابطه زیر تعیین نمود. این رابطه در واقع از مفهوم **ماتریس نرمی** ($\underline{k}^{-1}$) استفاده می کند. در این رابطه عملاً نیرویی معادل یک واحد حرکت تکیه گاه به سازه اِعمال شده و بر اساس ماتریس نرمی، میزان جا به جایی سایر درجات تعیین می شود:

$$\underline{L}=-\underline{k}^{-1}\underline{k}_g=-\begin{bmatrix} 3/7k & 1/7k \\ 1/7k & 3/14k \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -k \\ -3k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0/857 \\ 0/786 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{میزان جا به جایی } u_1 \text{ در اثر یک واحد جا به جایی تکیه گاه} \\ \text{میزان جا به جایی } u_2 \text{ در اثر یک واحد جا به جایی تکیه گاه} \end{array}$$

* حال کلیه ماتریس های لازم برای تشکیل معادله حرکت موجود می باشد. به دلیل مواجه بودن با معادلات مزدوج، لازم است حل مسأله به **فضای مُدال** منتقل شود. همچنین در ادامه مقادیر عددی بر اساس فروض مسأله به کار برده خواهند شد. در ابتدا فرکانس ها و اَشکال مُدی تعیین می شود. داریم:

$$\underline{k}=\begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 6k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4/5 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\frac{\text{tonf}}{\text{cm}} \quad , \quad \underline{m}=\begin{bmatrix} w/g & 0 \\ 0 & 2m/g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0/0102 & 0 \\ 0 & 0/0204 \end{bmatrix}\frac{\text{tonf.sec}^2}{\text{cm}}$$

---

[1] Dynamics of Structures, A. K. Chopra, 1995 , **Page 352**

$$\underline{k}-\omega_n^{۲}\underline{m}=\begin{bmatrix} ۳-۰/۰۱۰۲\omega_n^{۲} & -۲ \\ -۲ & ۶-۰/۰۲۰۴\omega_n^{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\underline{k}-\omega_n^{۲}\underline{m}\right|=۰ \Rightarrow \boxed{\underline{\omega}=\begin{bmatrix} ۴/۷۳ \\ ۱۷/۳۵ \end{bmatrix}\frac{rad}{sec}}$$

$$\omega_۱=۴/۷۳ \Rightarrow [\underline{k}-\omega_۱^{۲}\underline{m}]\,\underline{\phi}_۱=\begin{bmatrix} ۲/۷۷۲ & -۲ \\ -۲ & ۱/۴۴۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{۱۱} \\ \phi_{۲۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi_{۱۱}=۱} \underline{\phi}_۱=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱/۳۸۶ \end{bmatrix}$$

$$\omega_۲=۱۷/۳۵ \Rightarrow [\underline{k}-\omega_۲^{۲}\underline{m}]\,\underline{\phi}_۲=\begin{bmatrix} -۰/۰۷۲ & -۲ \\ -۲ & -۵۵/۴۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{۱۲} \\ \phi_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi_{۱۲}=۱} \underline{\phi}_۲=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}$$

بنابراین بر اساس نتایج فوق ماتریس اَشکال مُدی برابر خواهد بود با:

$$\boxed{\underline{\phi}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}}$$

* با مشخص‌شدن فرکانس‌ها و اَشکال مُدی می‌توان ماتریس های جرم، سختی و بار مُدی را تعیین نمود:

$$\underline{M}=\underline{\phi}^T\underline{m}\,\underline{\phi}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix} ۰/۰۱۰۲ & ۰ \\ ۰ & ۰/۰۲۰۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۴۹۴ & ۰ \\ ۰ & ۰/۰۱۰۲ \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}=\underline{\phi}^T\underline{k}\,\underline{\phi}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix} ۴/۵ & -۳ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۳/۴۷۳ & ۰ \\ ۰ & ۴/۷۲۷ \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}=\underline{\phi}^T\underline{c}\,\underline{\phi}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷/۹۸۲ & -۱ \\ -۱ & ۲/۱۵۲ \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^*=-\underline{\phi}^T\underline{m}\,\underline{L}\,\ddot{u}_g=-۱\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۳۸۶ & -۰/۰۳۶ \end{bmatrix}^T\times\begin{bmatrix} ۰/۰۱۰۲ & ۰ \\ ۰ & ۰/۰۲۰۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰/۸۶ \\ ۰/۷۹ \end{bmatrix}\ddot{u}_g=-\begin{bmatrix} ۰/۰۶۲ \\ ۰/۰۱۶ \end{bmatrix}\cos\pi t$$

مشاهده می شود که ماتریس میرایی $\underline{c}$ **غیرکلاسیک** بوده و مانع از قطری حاصل شدن ماتریس $\underline{C}$ شده است. در نتیجه معادلات فضای مُدال وابسته[۱] بوده و حل آن ها تنها با روش های عددی ممکن است؛ که در محدوده بررسی این تمرین نمی باشد:

$$\boxed{\underline{M}\,\ddot{\underline{q}}+\underline{C}\,\dot{\underline{q}}+\underline{K}\,\underline{q}=\underline{P}^* \Rightarrow \underline{q}=\ldots \Rightarrow \underline{U}=\underline{\phi}\,\underline{q}}$$

[۱] Coupled